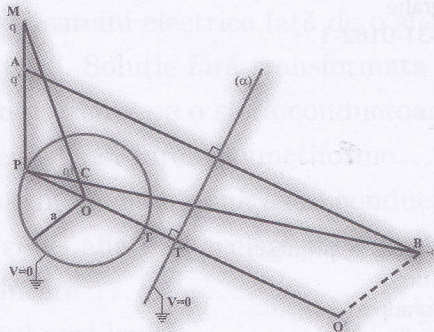




Tudor Micu
Dan Micu

GEOMETRIE ELEMENTARĂ ÎN ELECTROTEHNICA TEORETICĂ



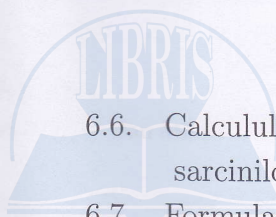
EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ, R.A.



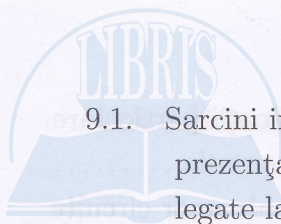


Cuprins

Prefață	11
Introducere	13
Partea 1. Aplicații ale geometriei elementare în electrostatică	15
1. Suprafața echipotențială de potențial nul în cazul a două sarcini punctiforme. Cercul lui Apollonius	17
2. Determinarea liniilor de câmp în cazul a două fire paralele infinit lungi încărcate uniform cu densitatea liniară de sarcină ρ_l respectiv $-\rho_l$	19
3. Stabilirea axelor electrice a două conductoare cilindrice, infinit lungi, paralele, încărcate cu sarcini opuse	21
4. Imaginea unei sarcini electrice față de o sferă conductoare de potențial nul. Soluție fără transformata Kelvin	25
5. Densitatea de sarcină pe o sferă conductoare de potențial nul în prezența unei sarcini punctiforme	28
6. Sarcinile imagine pentru două sfere conductoare exterioare de raze R_1 și R_2 aflate la același potențial	30
6.1. Introducere	31
6.2. Enunțul problemei	32
6.3. Stabilirea configurației inverse modificate	33
6.4. Determinarea sarcinilor imagine primare în "configurația inversă modificată"	35
6.5. Revenirea la "configurația inițială". Determinarea sarcinilor imagine ale dispozitivului ...	41



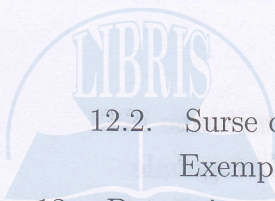
6.6.	Calculul potențialului sferei de rază R_1 cu ajutorul sarcinilor imagine.....	44
6.7.	Formula capacității dispozitivului format din cele două sfere.....	46
6.8.	Convergența formulelor de calcul.....	47
6.9.	Algoritmul de calcul.....	48
6.10.	Exemplu de calcul.....	51
7.	Sarcinile imagine pentru două sfere conductoare care formează un unghi $\frac{\pi}{n}$ aflate la același potențial.....	55
7.1.	Enunțul problemei.....	55
7.2.	Aflarea sarcinilor imagine primare.....	56
7.3.	Aflarea sarcinilor imagine ale dispozitivului.....	57
7.4.	Determinarea capacității.....	60
7.5.	Exemplu de calcul.....	61
7.6.	Sarcinile imagine pentru două sfere conductoare tangente.....	62
8.	Sarcini imagine ale unei sarcini punctiforme în prezența unei sfere conductoare.....	66
8.1.	Determinarea sarcinilor imagine ale unei sarcini punctiforme în prezența unei sfere conductoare legate la pământ cu metoda transformatei Kelvin... ..	66
8.2.	Determinarea sarcinilor imagine în cazul unei sarcini punctiforme aflate în prezența unei sfere conductoare izolate fără sarcină electrică.....	69
8.3.	Determinarea sarcinilor imagine în cazul unei sarcini punctiforme aflate în prezența unei sfere conductoare de potențial impus V_0 (sfera neizolată).....	70
8.4.	Determinarea sarcinilor imagine în cazul unei sarcini punctiforme aflate în prezența unei sfere conductoare de potențial V_0 (sfera izolată).....	71
9.	Sarcini imagine ale unei sarcini punctiforme în prezența a două sfere conductoare ortogonale.....	72



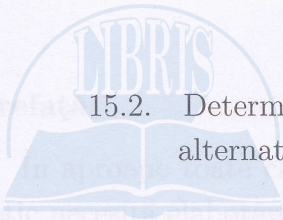
9.1. Sarcini imagine ale unei sarcini punctiforme în prezența a două sfere conductoare ortogonale legate la pământ	72
9.2. Sarcini imagine ale unei sarcini punctiforme în prezența a două sfere conductoare ortogonale izolate, neîncărcate cu sarcină.....	79
9.3. Sarcini imagine ale unei sarcini punctiforme în prezența a două sfere conductoare ortogonale izolate, încărcate inițial cu sarcină	81
9.4. Sarcini imagine ale unei sarcini punctiforme în prezența a două sfere conductoare ortogonale neizolate aflate la potențial impus V_0	82

Partea 2. Aplicații ale geometriei elementare în teoria circuitelor electrice 85

10. Aplicații ale geometriei elementare în probleme de topologia circuitelor electrice.....	87
10.1. Determinarea numărului minim de laturi al unui circuit electric cu n noduri.....	87
10.2. Determinarea numărului de ochiuri independente pentru un circuit electric cu l laturi și n noduri	89
11. Determinarea geometrică (grafică) a unor rezistențe electrice echivalente.....	92
11.1. Determinarea grafică a rezistenței echivalente pentru n rezistențe legate în paralel.....	92
11.2. Determinarea grafică a rezistenței stelei corespunzătoare triunghiului de rezistențe R_{12} , R_{23} , R_{31} cunoscute	94
12. Determinarea unor proprietăți electrice ale unor circuite de curent alternativ pe baza diagramelor fazoriale.....	96
12.1. Surse cunoscute, voltmetre cu indicații particulare. Exemplul 1	96



12.2.	Surse cunoscute, voltmetre cu indicații particulare. Exemplul 2	98
13.	Determinarea unor proprietăți electrice ale unor circuite trifazate pe baza diagramelor fazoriale	101
13.1.	Un circuit hexafazat simetric	101
13.2.	Surse trifazate cunoscute, condiții impuse asupra indicațiilor unor voltmetre	104
13.3.	Determinarea grafică a componentelor simetrice pentru un sistem trifazat	112
13.4.	Componentele simetrice pentru sistemele de tensiuni de fază care au aceleași tensiuni de linie.....	115
13.5.	Componenta directă a tensiunilor surselor date prin valori efective.....	117
13.6.	Aprecierea calității unui circuit trifazat prin coeficientul de disimetrie.....	120
14.	Studiul circuitelor cu ajutorul inversiunii geometrice.....	123
14.1.	Analiza circuitelor reale L-C paralel la rezonanță cu metoda inversiunii	126
14.2.	Observații asupra circuitului complet aperiodic	129
14.3.	Circuitul defazor	131
14.4.	Putere maximă și curent maxim la bornele unui circuit în funcție de valoarea unei rezistențe.....	135
14.5.	Circuit de alimentare a cuptorului cu încălzire directă (Curent absorbit de valoare efectivă constantă la variația unei rezistențe).....	138
14.6.	Proiectarea unei scheme optime de pornire a unei mașini electrice monofazate folosind inversiunea geometrică.....	141
14.7.	Inversiunea geometrică în sinteza circuitelor eteroparametrice dipolare.....	147
15.	Diagrama cu doi poli de tensiune (diagrama de putere)...	152
15.1.	Teoria diagramei cu doi poli de tensiune.....	153



15.2. Determinarea puterii maxime debitate de un
alternator 156

Anexe 159

Anexa I. Situații posibile pentru un corp conductor 161

Anexa II. Calculul câmpului electric în prezența
conductoarelor cu metoda imaginilor electrice 163

Anexa III. Transformarea prin inversiune a spațiului 171

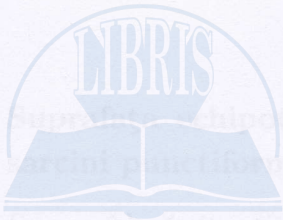
Anexa IV. Transformata sarcinii și potențialului.
Sarcina suplimentară din pol 179

Anexa V. Modelul matematic diferențial al ecuațiilor câmpului
electromagnetic 183

Anexa VI. Câteva proprietăți geometrice legate de cerc 191

Anexa VII. Extinderea în câmp magnetic staționar
a unor proprietăți geometrice stabilite în electrostatică 197

Bibliografie 203



1. După ce a descoperit potențialul de potențial nul în cazul a două sarcini punctiforme, Cercul lui Apollonius.

Se consideră situația din Figura 1.1 în care sarcina pozitivă q_1 se află în punctul fix A , iar sarcina negativă q_2 se află în punctul fix B .

Potențialul unei sarcini fiind de același semn cu sarcina, vor exista două puncte pe dreapta AB în care potențialul este nul.

Ne întrebăm dacă avem și alte puncte P în spațiu cu această proprietate.

Partea 1

Cu formula (2) (sau (1)) avem:

Aplicații ale geometriei elementare în electrostatică

de unde

$$\frac{1}{r_1} = \frac{q_2}{q_1} = k, \quad (1)$$

unde k fiind o constantă.

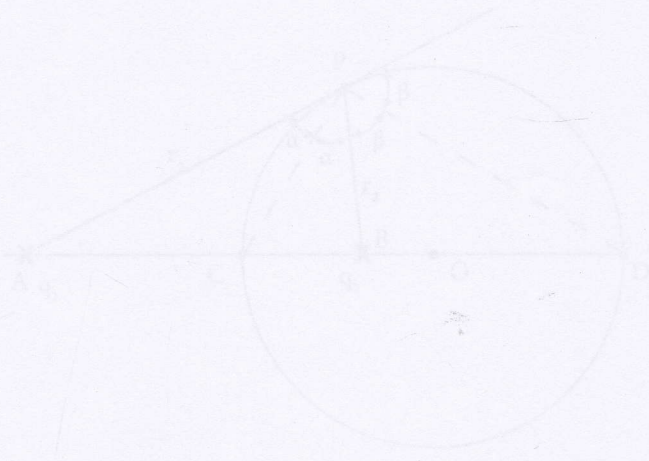


Figura 1.1

Problema este cunoscută: Se duce bisectoarea interioară și exterioară a unghiului \widehat{APB} care taie AB în C respectiv D .

Din teorema bisectoarei interioare și exterioare avem:

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = \frac{r_1}{r_2} = k \quad (2)$$

1. Suprafața echipotențială de potențial nul în cazul a două sarcini punctiforme. Cercul lui Apollonius

Se consideră situația din Figura 1.1 în care sarcina pozitivă q_1 se află în punctul fix A , iar sarcina negativă q_2 se află în punctul fix B .

Potențialul unei sarcini fiind de același semn cu sarcina, vor exista două puncte pe dreapta AB în care potențialul este nul.

Ne întrebăm dacă avem și alte puncte P în spațiu cu această proprietate.

Cu formula (2) (anexa II) avem:

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} \right) = 0$$

de unde

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{q_1}{|q_2|} = k, \quad (1)$$

k fiind o constantă.

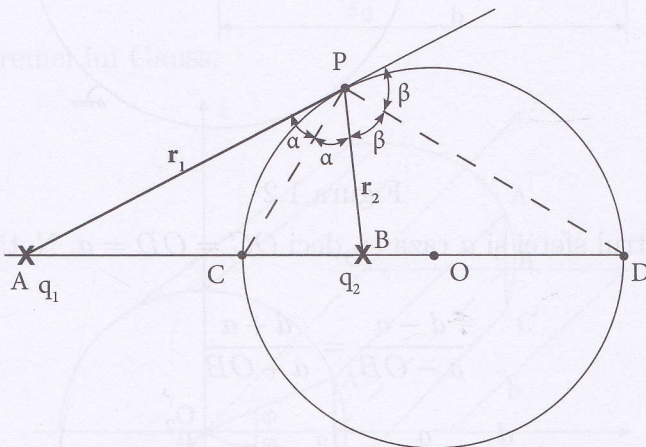


Figura 1.1

Problema este cunoscută: Se duce bisectoarea interioară și exterioară a unghiului \widehat{APB} care taie AB în C respectiv D .

Din teorema bisectoarei interioare și exterioare avem

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = \frac{r_1}{r_2} = k \quad (2)$$

de unde rezultă că punctele C și D sunt fixe.

Bisectoarele interioară și exterioară fiind perpendiculare, unghiul $\widehat{CPD} = 90^\circ$, deci locul geometric al punctului P este cercul de diametru CD în plan (cercul lui Apollonius) și având în vedere simetria plan-meridiană a problemei, este sfera de diametru CD în spațiu.

Observație. Câmpul și potențialul în exteriorul sferei de diametru CD nu se modifică dacă suprafața sferei fictive (care este de potențial nul) se înlocuiește cu o sferă conductoare de potențial nul (legată la pământ), Figura 1.2, conform efectului de ecran [2].

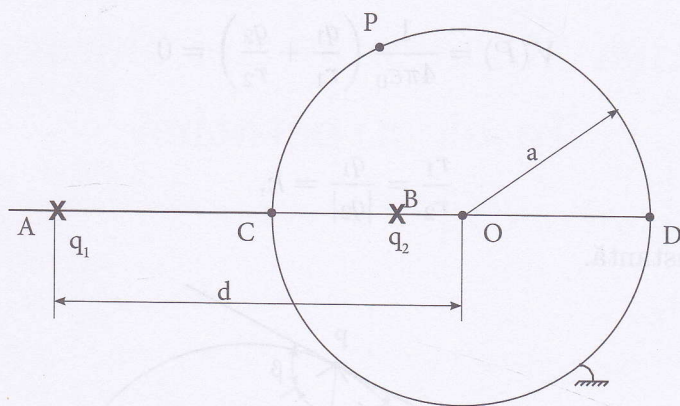


Figura 1.2

Fie O centrul sferei și a raza ei, deci $OC = OD = a$. Notăm $AO = d$. Din (2) avem

$$\frac{d - a}{a - OB} = \frac{d + a}{a + OB}$$

de unde

$$\frac{d}{a} = \frac{a}{OB} \quad \text{sau} \quad OB = \frac{a^2}{d}. \quad (3)$$

Din (1) avem

$$\frac{q_1}{|q_2|} = \frac{d}{a} \quad \text{sau} \quad q_2 = -\frac{a}{d}q_1. \quad (4)$$

Deducem că dacă avem o sferă de rază a legată la pământ și o sarcină punctiformă q_1 la distanța $OA = d$ de centrul sferei (Figura 1.2) calculul câmpului și potențialului în exteriorul sferei se poate face cu sarcina q_1

și sarcina q_2 (Figura 1.1), unde poziția și valoarea sarcinii q_2 sunt date de formulele (3) și (4).

Este problema imaginii sarcinii punctiforme față de sfera de potențial nul, problemă care va fi reluată pe parcursul cărții.

2. Determinarea liniilor de câmp în cazul a două fire paralele infinit lungi încărcate uniform cu densitatea liniară de sarcină ρ_l respectiv $-\rho_l$

În prealabil se vor stabili unele relații utile în abordarea problemei. Astfel, fluxul câmpului electric (anexa II, formula (3)) stabilit de un fir infinit încărcat cu densitatea liniară de sarcină ρ_l prin suprafața laterală a unui cilindru circular drept de înălțime b (firul fiind situat în axa Oy de simetrie a cilindrului) (Figura 2.1) este:

$$\psi = \frac{\rho_l b}{\epsilon_0}$$

conform teoremei lui Gauss.

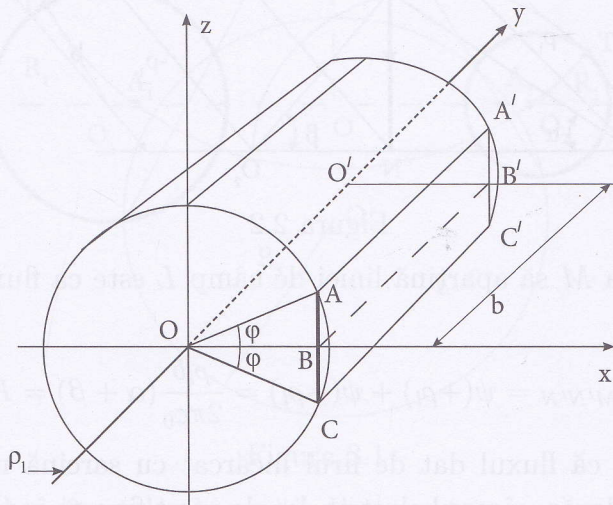


Figura 2.1

Fluxul câmpului electric (anexa II, formula (3)) prin suprafața dreptunghiului $AA'C'C'$ ($AA' \parallel CC' \parallel Oy$) va fi egal cu fluxul prin porțiunea de



suprafață laterală a cilindrului delimitată de generatoarele AA' și CC' :

$$\psi_{AA'C'C} = \frac{2\varphi}{2\pi} \psi = \frac{\rho_l b}{\pi \epsilon_0} \varphi.$$

Din motive de simetrie, fluxul prin suprafața dreptunghiului $AA'B'B$ (plan $AA'B'B \perp OO'B'B$) este:

$$\psi_{AA'B'B} = \frac{1}{2} \psi_{AA'C'C} = \frac{\rho_l b}{2\pi \epsilon_0} \varphi.$$

Se abordează acum problema propusă observând că conturul dreptunghiului $MM'N'N$ determină un tub de câmp (Figura 2.2). Într-adevăr, problema având simetrie plan paralelă, o linie de câmp care trece prin M respectiv N se va regăsi în fiecare punct al segmentului MM' respectiv NN' , în plane paralele (Figura 2.2).

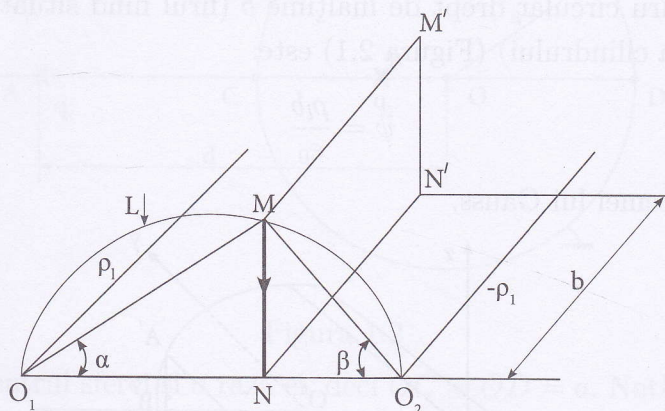


Figura 2.2

Condiția ca M să aparțină liniei de câmp L este ca fluxul $\psi_{MM'N'N}$ să fie constant

$$\psi_{MM'N'N} = \psi(+\rho_l) + \psi(-\rho_l) = \frac{\rho_l b}{2\pi \epsilon_0} (\alpha + \beta) = K.$$

Se observă că fluxul dat de firul încărcat cu sarcină negativă este pozitiv. Într-adevăr, câmpul electric dat de acest fir este îndreptat înspre fir, orientarea vectorului suprafeței este spre dreapta (Figura 2.2).

Locul geometric al punctului M este arcul capabil de unghiul constant $\pi - (\alpha + \beta)$ care trece prin punctele fixe O_1 și O_2 .